**Annexe 2 : Equations d’onde.**

Les calculs explicites de cet appendice sont effectués en annexe dans le cadre d’une session Mathematica.

Intéressons-nous à l’équation d’évolution des particules spinales. Toute particule possède des degrés de liberté externes (position, quantité de mouvement, etc) et internes (spin). Une équation acceptable doit rencontrer un certain nombre d’exigences :

* être du premier ordre en les dérivées partielles spatio-temporelles,
* être relativiste, c’est-à-dire invariante par rapport à la transformation de Lorentz,
* impliquer l’équation de Klein-Gordon, ,
* permettre la définition d’une densité de probabilité de présence positive et enfin,
* autoriser la définition d’un hamiltonien qui commute avec le moment cinétique total, ***Lz+Sz***.

Dirac fut le premier à comprendre que la solution à ce problème passait par la démultiplication du nombre des composantes de la fonction d’onde, typiquement, 4s+2, pour une particule de spin s. Le hamiltonien s’exprime alors à l’aide de quatre matrices, x, y, z et ,de dimensions (4s+2)x(4s+2) :

.

On détermine les matrices inconnues en exigeant qu’il existe un opérateur de spin, Sz, tel que H commute avec ***Lz+Sz***. Or on calcule aisément que (cfr annexe 1) :



On doit donc définir Sz en sorte que l’on ait :

.

Cela exige que l’on ait simultanément :

.

Les trois premières relations suggèrent de calquer les  sur les matrices de spin. Une solution consiste donc à poser :

,

où les matrices  et Id sont respectivement les matrices (2s+1)x(2s+1) de Pauli généralisées et identité. On obtient l’équation d’onde suivante :

.

Il importe d’être conscient qu’il existe en fait une infinité de représentations équivalentes dérivant de celle-ci par n’importe quelle transformation unitaire, U. On a en effet l’équivalence suivante :

.

La représentation chirale est particulièrement importante, où l’opérateur associé à la composante selon Oz du spin est diagonal :

.

Particule de spin 1/2.

Dans la représentation chirale, la théorie précédente s’applique, il suffit d’utiliser les matrices simples 2x2 de Pauli et la matrice identité :

.

Quant à la fonction d’onde, elle comporte quatre composantes que l’on peut agréablement ranger en deux bispineurs,



dont les composantes obéissent à deux équations couplées de dimensions deux :



Particule de spin 1.

Le même schéma s’applique aux particules de spin 1, sauf qu’il faut remplacer les matrices 2x2,  de Pauli par les matrices 3x3,correspondantes déjà rencontrées :



Ces formes matricielles correspondent à la représentation chirale puisque z est diagonal. La fonction d’onde comporte cette fois six composantes que l’on peut encore ranger en deux parties,

.

Elles obéissent encore à deux équations couplées de dimensions trois :

.

Dans le cas particulier mais important du photon, le terme de masse disparaît et ces équations coïncident avec les lois d’Ampère et de Faraday. Il suffit, pour s’en convaincre, de poser que les six composantes de la fonction d’onde sont un mélange convenable des trois composantes des champs électrique et magnétique :

.

On peut simplifier la présentation en travaillant dans une représentation autre que la représentation chirale. On a alors que la fonction d’onde est reliée aux champs électrique et magnétique classiques, sous la forme plus agréable :

.

On remarque que la disparition de la constante de Planck dans l’équation d’évolution du photon résulte de l’absence de masse de celui-ci. Cela explique pourquoi les équations de Maxwell, bien que d’essence classique, prédisent correctement tous les phénomènes optiques tout en s’en tenant à un point de vue ondulatoire. En particulier, la théorie de la polarisation lumineuse se développe indifféremment sur base de l’existence d’un champ électromagnétique transversal ou d’un photon doué d’une hélicité gauche ou droite

Deux points restent à éclaircir. En premier lieu, un lecteur attentif aura remarqué que deux équations de Maxwell manquent à l’appel dans le décompte précédent. La raison en est que, contrairement à ce qui se passe dans le cas du spin 1/2, l’équation valable pour le spin 1,

,

ne garantit pas automatiquement que ses solutions obéissent à l’équation de Klein-Gordon. Il faut imposer deux conditions supplémentaires qui ne s’expriment simplement que lorsque la masse de la particule vaut zéro, ce qui est heureusement le cas du photon. Dans ce cas précis, les calculs détaillés indiquent que ces conditions s’écrivent :

,

et on voit apparaître les deux lois de Gauss.

Enfin, le deuxième point concerne l’absence d’état de spin zéro pour le photon. Les calculs montrent qu’une solution de l’équation d’évolution en forme d’onde plane exige l’annulation des composantes longitudinales, Ez et Bz,qui correspondent précisément à l’état de spin Sz nul. Comme une fonction d’onde ne peut jamais être nulle, on en conclut qu’il ne peut exister d’état propre correspondant à la valeur Sz =0.

En résumé, l’inexistence de la composante de spin zéro du photon équivaut à la transversalité obligatoire des champs dans une onde électromagnétique ou encore aux deux lois de Gauss. Ce sont trois manières différentes d’exprimer la même idée en partant de points de vues différents.